# Le problème de l'aiguille de Buffon

Dans tout ce qui suit, on admet que les distributions de probabilité sont uniformes.
On s'inspirera de l'exemple suivant :

Considérons une cible simplement constituée de deux cercles concentriques dont le plus grand a un rayon double de celui, r, du plus petit. On lance sur la cible une fléchette. On suppose nulle la probabilité pour que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible. Cherchons la probabilité pour que la fléchette atteigne la couronne la plus intérieure de la cible. Celle-ci est égale au rapport de l'aire de cette couronne ("nombre" de cas favorables) à celle de la cible entière ("nombre" de cas possibles), c'est à dire à :

$$\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \quad .$$

(on notera que, dans cette théorie, la probabilité d'atteindre un *point* "précis" est nulle.)

## 1°) Le jeu du "franc-carreau".

*"Dans une chambre parquettée ou pavée de carreaux (carrés) égaux, on jette en l'air un écu; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est à dire sur un seul carreau; le second parie que l'écu couvrira au moins un des joints qui séparent les carreaux."*

a) Quelles sont les probabilités respectives de gain de chacun des joueurs ?

(on notera a le coté d'un carreau, 2b le diamètre de l'écu ; on examinera le cas $b \geq a/2$ puis le cas $b < a/2$ en considérant un carré de même centre que le carreau dont les cotés sont parallèles à ceux du carreau et ont pour longueur $a-2b$.)

b) Dans quel cas le jeu est-il équitable ?

## 2°) Le problème de l'aiguille.

*"Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une aiguille, et que l'un des joueurs parie que l'aiguille ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que l'aiguille croisera quelques-unes de ces parallèles."*

On cherche la probabilité P que l'aiguille croise un des joints du parquet.

On note 2a la largeur d'une des lames du parquet et 2b la longueur de l'aiguille.
Soit I le milieu de l'aiguille. On note y la distance de I au joint inférieur d'une lame et $\alpha$ une mesure de l'angle de droites que fait l'aiguille avec les parallèles du parquet.

a) Quelles inégalités vérifient y et $\alpha$ ? On notera (1) ces conditions.

b) A quelles conditions sur y,a,b et $\alpha$ l'aiguille coupe-t-elle les joints ? On notera (2) ces conditions.

c) On considère un plan $\Pi$ rapporté à un repère orthogonal d'axes $(O\alpha)$ et $(Oy)$.
Tracer dans ce plan les courbes d'équations $y=f(\alpha)=2a-b\sin\alpha$ et $y=g(\alpha)=b\sin\alpha$. ($\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$)

d) Montrer que la réunion des conditions (1) et (2) est équivalente à l'appartenance d'un point $M(\alpha,y)$ à une région de $\Pi$ que l'on précisera.

e) Quelle est l'aire de cette région ?

f) En déduire P. (en fonction de a et b)

g) Que vaut P si a=b ? En déduire une démarche possible pour le calcul de $\pi$.

---

Dans le même ordre d'idées :

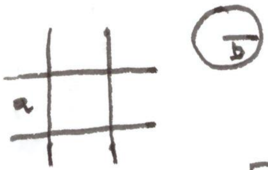
On choisit au hasard deux réels x et y dans [0,1].
Calculer la probabilité pour que la somme de leurs carrés soit inférieure à 1/4.

---

# Buffon

## 1°/ Franc-carreau

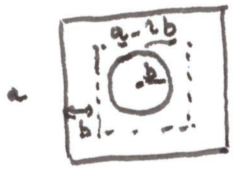
a)




* Cas $b \geq a/2$ $\boxed{P(\text{franc-carreau}) = 0 \quad P(\text{joint}) = 1}$

* Cas $b < a/2$

$P(\text{franc-carreau}) = \dfrac{(a-2b)^2}{a^2} = \boxed{\left(1 - \dfrac{2b}{a}\right)^2}$



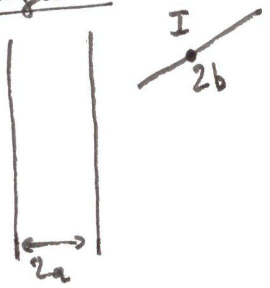

$P(\text{joint}) = 1 - \left(1 - \dfrac{2b}{a}\right)^2 = \left(1 + 1 - \dfrac{2b}{a}\right)\left(1 - 1 + \dfrac{2b}{a}\right) = \boxed{\dfrac{4b}{a}\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)}$

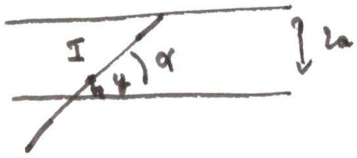
b) Jeu équitable $\iff \left(1 - \dfrac{2b}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ $\quad 1 - \dfrac{2b}{a} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{2b}{a} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ impossible

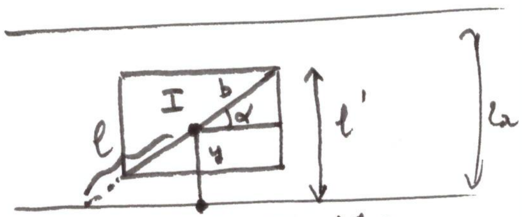
$\iff \dfrac{2b}{a} = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \dfrac{2b}{a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

car il faut $\dfrac{2b}{a} < 1$. Donc $\boxed{\dfrac{2b}{a} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

## 2°/ L'aiguille




coupe $\iff b \geq l$ ou $l' \geq 2a$

a) $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq y \leq 2a \end{cases}$ (1)

b) $\alpha \neq 0$ $\quad y \geq 2a - b\sin\alpha$ ou $y \leq b\sin\alpha$